2018학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	⑤	**2**	④	**3**	②	**4**	④	**5**	③
6	①	**7**	③	**8**	④	**9**	②	**10**	①
11	③	**12**	③	**13**	④	**14**	⑤	**15**	②
16	①	**17**	②	**18**	⑤	**19**	①	**20**	⑤
21	⑤	**22**	25	**23**	6	**24**	9	**25**	16
26	63	**27**	325	**28**	54	**29**	209	**30**	49

1. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\dfrac{3}{2}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=\dfrac{3}{2}$

2. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 호의 길이는 $4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$

3. [출제의도] 쌍곡선의 방정식 이해하기

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\dfrac{2}{5}x,\ y=-\dfrac{2}{5}x$이므로 $k=\dfrac{2}{5}$

4. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$0<\dfrac{1}{2}<1$이므로 지수함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$은

닫힌 구간 $[2,4]$에서 $x=4$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 최솟값은 $f(4)=\dfrac{1}{4}$

5. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x\,dx=\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}$

6. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$f(x)=x^2-2x\ln x$라 하면

$f'(x)=2x-(2\ln x+2),\ f''(x)=2-\dfrac{2}{x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$

$x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 변곡점의 x좌표는 1

7. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

$5=3+2$
$\ \ =3+1+1$
$\ \ =2+2+1$
$\ \ =2+1+1+1$
$\ \ =1+1+1+1+1$

따라서 구하는 분할의 수는 5

8. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

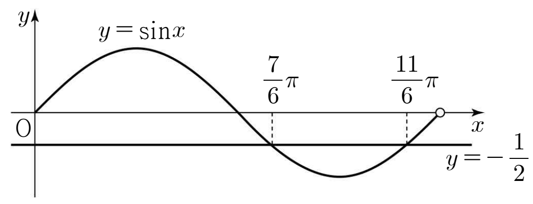
$x^3+xy-y^2=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y+x\dfrac{dy}{dx}-2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+y}{-x+2y}\ \ (x\neq 2y)$

따라서 점 $(2,4)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{8}{3}$

9. [출제의도] 삼각함수 이해하기



$2\sin x+1<0$의 해는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<\dfrac{11}{6}\pi$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{7}{6}\pi,\ \beta=\dfrac{11}{6}\pi$

따라서 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

10. [출제의도] 이항정리 이해하기

$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\left(\dfrac{x}{2}\right)^r\left(\dfrac{a}{x}\right)^{6-r}={}_6\mathrm{C}_r\left(\dfrac{1}{2}\right)^r a^{6-r}x^{2r-6}$

$x^{2r-6}=x^2$에서 $r=4$이므로 x^2의 계수는

${}_6\mathrm{C}_4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times a^2=\dfrac{15}{16}\times a^2=15$

따라서 $a=4$

11. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$g'(x)=f'(f(x))\times f'(x),\ f'(x)=\dfrac{1}{2}+2\cos x$

$f(\pi)=\dfrac{\pi}{2},\ f'(\pi)=-\dfrac{3}{2},\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이므로

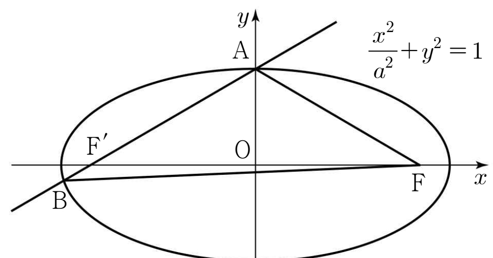
$g'(\pi)=f'(f(\pi))\times f'(\pi)$

$\qquad=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times f'(\pi)=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

12. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

점 $\mathrm{A}(0,1)$을 지나는 타원 C의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>0)$이라 하자.



그림과 같이 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$이고, 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 16이므로 $4a=16,\ a=4$

$\therefore\ c^2=16-1=15$

따라서 선분 FF′의 길이는 $2\sqrt{15}$

13. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

함수 $f'(x)$를 적분하면

$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & (x<1)\\ x\ln x-x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

(단, $C_1,\ C_2$는 적분상수)

$f(e)=e\ln e-e+C_2=2$이므로 $C_2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1+3+C_1$

$1=1+3+C_1$이므로 $C_1=-3$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}x^2+3x-3 & (x\le 1)\\ x\ln x-x+2 & (x>1)\end{cases}$

따라서 $f(-6)=36-18-3=15$

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$이 x축과 만나므로

$a\log_2(x-a+1)=0$에서 $x=a$

곡선 $y=2^{x-a}-1$이 x축과 만나므로

$2^{x-a}-1=0$에서 $x=a$

$\therefore\ \mathrm{A}(a,0)$

점 B의 y좌표를 $k(k>0)$라 하면

삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times k=\dfrac{1}{2}\times a\times k=\dfrac{7}{2}a$이므로 $k=7$

$2^{x-a}-1=7$이므로 $x=a+3$

$\therefore\ \mathrm{B}(a+3,7)$

점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로

$a\log_2(a+3-a+1)=7$에서 $a=\dfrac{7}{2}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\dfrac{7}{2},0\right),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{13}{2},7\right)$

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5,\dfrac{7}{2}\right)$이므로

$p=5,\ q=\dfrac{7}{2}$

따라서 $p+q=\dfrac{17}{2}$

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 두 직선 $x=1,\ x=2$ 및 x축으로

둘러싸인 부분의 넓이는 $S=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2$

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 두 직선 $x=1,\ x=a$ 및 x축으로

둘러싸인 부분의 넓이는 $2S=2\ln 2$이므로

(i) $a>1$일 때, $\displaystyle\int_1^a\frac{1}{x}dx=\ln a=2\ln 2$

$\therefore\ a=4$

(ii) $0<a<1$일 때, $\displaystyle\int_a^1\frac{1}{x}dx=-\ln a=2\ln 2$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

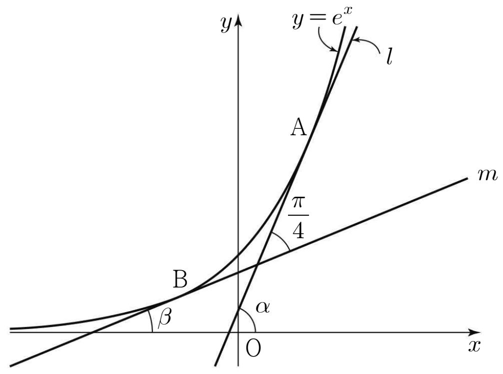
따라서 모든 a의 값의 합은 $4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{4}$

16. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의

두 점 $\mathrm{A}(t,e^t),\ \mathrm{B}(-t,e^{-t})$에서의

접선 $l,\ m$의 기울기는 각각 $e^t,\ e^{-t}$이다.



두 직선 $l,\ m$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\tan\alpha = e^t,\ \tan\beta = e^{-t}$

$\tan\frac{\pi}{4} = \tan(\alpha-\beta)$

$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{e^t - e^{-t}}{1+e^t e^{-t}} = 1$

$e^t - e^{-t} = 2$

$(e^t)^2 - 2e^t - 1 = 0$

$e^t > 0$이므로 $e^t = 1+\sqrt{2}$

$\therefore\ t = \ln(1+\sqrt{2})$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{e^t - e^{-t}}{t-(-t)} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한 추론하기

두 곡선 $y = e^{x-1}$과 $y = a^x$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $e^{x-1} = a^x$의 해이다.

양변에 $\frac{e}{a^x}$를 곱하면 $\left(\frac{e}{a}\right)^x = e$

$x = \frac{1}{\ln\frac{e}{a}}$이므로 $f(a) = \frac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$a - e = t$라 하면 $a = t + e$이고,

$a \to e+$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)} = \lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{(e-a)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\ln\frac{e}{t+e}}{-t}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}$$

18. [출제의도] 포물선의 접선을 활용하여 문제해결하기

점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을 $\mathrm{B}(x_1, y_1)$이라 하면

점 B에서의 접선의 방정식은 $y = \frac{8}{y_1}(x + x_1)$

포물선의 준선의 방정식이 $x = -4$이므로

$\mathrm{A}\left(-4, \frac{8}{y_1}(x_1 - 4)\right)$, $\mathrm{H}(-4, y_1)$

점 A가 제3사분면 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{8}{y_1}(4 - x_1)$

$\overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{CH}} = \frac{8}{y_1}(4-x_1) \times y_1 = 8$

$\therefore\ x_1 = 3,\ y_1 = 4\sqrt{3}$

$\mathrm{A}\left(-4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\mathrm{B}(3, 4\sqrt{3})$, $\mathrm{H}(-4, 4\sqrt{3})$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{14}{3}\sqrt{3} = \frac{49}{3}\sqrt{3}$

19. [출제의도] 순열과 조합 추론하기

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는 '(ⅰ) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우'에서 '(ⅱ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우'와 '(ⅲ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우'를 제외하면 된다.

(ⅰ)의 경우 :

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_3$이다.

(ⅱ)의 경우 :

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.

(ⅲ)의 경우 :

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우는 2는 반드시 포함되어야 하고 3은 포함되지 않아야 하므로 경우의 수는 $\boxed{n-3}$이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도 $\boxed{n-3}$이다.

또한

연속되는 두 수가 k, $k+1(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$라 하면 이 경우의 수는 $(n-3)$이고,

각각의 경우에 k, $k+1$과 연속되지 않는 수가 적혀 있는 하나의 공을 더 선택하는 경우의 수는 $(n-4)$이므로

연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는 $\boxed{(n-3)(n-4)}$이다.

따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는

$2\times\left(\boxed{n-3}\right) + \boxed{(n-3)(n-4)}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n-2) - \{2(n-3) + (n-3)(n-4)\}$

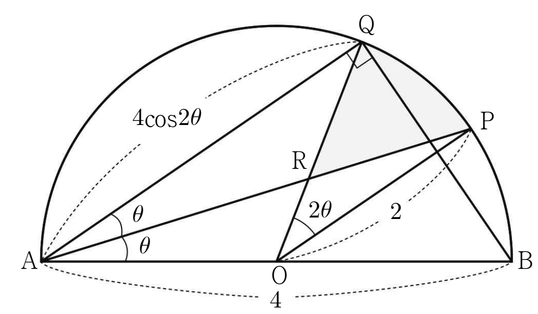
$= \boxed{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}$이다.

$\therefore\ p(n) = n-3,\ q(n) = (n-3)(n-4),$

$r(n) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$

따라서 $\frac{p(18)\times q(17)}{r(16)} = \frac{15\times(14\times 13)}{\frac{14\times 13\times 12}{6}} = \frac{15}{2}$

20. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



부채꼴 OPQ는 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 2θ이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2^2 \times 2\theta = 4\theta$

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{\mathrm{AQ}} = 4\cos 2\theta$

삼각형 AOQ에서 $\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$, $\overline{\mathrm{RQ}} = 2 - \overline{\mathrm{OR}}$

선분 AR는 각 QAO의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{OR}} : \overline{\mathrm{RQ}}$

$2 : 4\cos 2\theta = \overline{\mathrm{OR}} : (2 - \overline{\mathrm{OR}})$

$\overline{\mathrm{OR}} = \frac{2}{2\cos 2\theta + 1}$

삼각형 OPR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin 2\theta = \frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분은 부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPR를 제외한 부분이므로

$S(\theta) = 4\theta - \frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0+}\left\{4 - \frac{2\sin 2\theta}{\theta(2\cos 2\theta + 1)}\right\}$$

$$= 4 - 4\times\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

21. [출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x)) = x$

$f(1) = 2$이므로 $g(2) = 1$

주어진 식에서

$f'(g(x)) = \frac{1 - \{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}$

$= \frac{1 - x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3} = \frac{1}{g'(x)}$이므로

$g'(x) = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1 - x^3\{g(x)\}^2}$ $\cdots$ (＊)

ㄱ. 식 (＊)에 $x=2$를 대입하면

$g'(2) = \frac{2^2\times\{g(2)\}^3}{1 - 2^3\times\{g(2)\}^2}$

$= \frac{2^2}{1-2^3} = -\frac{4}{7}$ $\therefore$ (참)

ㄴ. 식 (＊)을 정리하면

$g'(x) = x^3\{g(x)\}^2 g'(x) + x^2\{g(x)\}^3$

$= x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x) + g(x)\}$

양변을 x에 대하여 적분하면

$xg'(x) + g(x) = \{xg(x)\}'$이므로

$\int g'(x)dx = \int\{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'dx$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 + C$ (단, C는 적분상수)

$x = 2$를 대입하면 $1 = \frac{8}{3} + C$이므로 $C = -\frac{5}{3}$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$ $\cdots$ (＊＊) $\therefore$ (참)

ㄷ. 식 (＊＊)에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$

함수 $h(t) = t^3 - 3t - 5$, $g(1) = \alpha$라 하면

$h'(t) = 3(t+1)(t-1)$

$t = -1$에서 극댓값 -3, $t = 1$에서 극솟값 -7을 가지므로 방정식 $h(t) = 0$은 하나의 실근 α를 갖는다.

$h(2) = 8 - 6 - 5 = -3 < 0$,

$h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{25}{8} > 0$이므로

사이값 정리에 의해 $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

$2 < g(1) < \frac{5}{2}$ $\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 로그방정식 계산하기

$\log_3(x+2) = 3$에서 $x + 2 = 3^3$

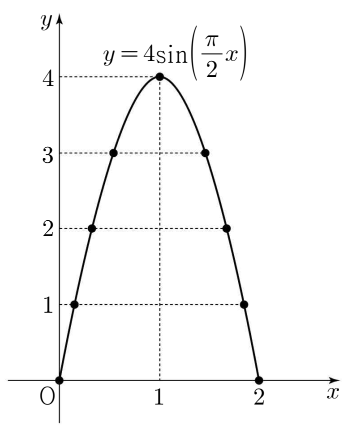
따라서 $x = 25$

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$이므로 $f'(16) = \frac{3}{2}\times 4 = 6$

24. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

곡선 $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(0 \le x \le 2)$는 그림과 같다.



따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 9

25. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$$f'(x)=\frac{(x^2+x+8)-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}$$

$$=\frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2}>0$$

$(x^2+x+8)^2>0$이므로

$-x^2+8>0$

$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha=-2\sqrt{2},\ \beta=2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=16$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

두 수 2, 4에서 중복을 허락하여 두 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

세 수 1, 3, 5에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times21=63$

27. [출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 문제해결하기

$f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{n-\ln t}{t}dt$의 양변을 x에 대하여

미분하면 $f'(x)=\dfrac{n-\ln x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=e^n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	(0)	$\cdots$	e^n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 최댓값을 가지므로

$g(n)=f(e^n)=\displaystyle\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$

$n-\ln t=s$라 하면 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{t}$이고,

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$이므로

$$g(n)=\int_n^0(-s)ds$$

$$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_n^0$$

$$=\frac{1}{2}n^2$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{12}g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{n^2}{2}=325$

28. [출제의도] 쌍곡선의 방정식을 활용하여 추론하기

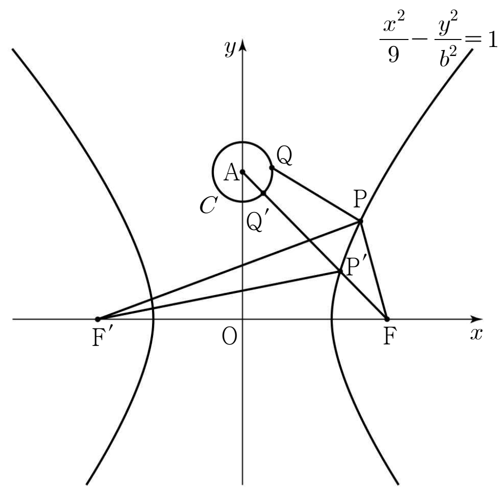
쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $a^2=9$

점 P가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+(\overline{\mathrm{PF}}+6)=(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}})+6$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}$는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.



그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과

원 C와 만나는 점을 각각 P′, Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}\geq(\overline{\mathrm{P'Q'}}+\overline{\mathrm{P'F}})+6$

$=(\overline{\mathrm{AF}}-1)+6$

$=\sqrt{c^2+25}+5$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값이 12이므로 $\sqrt{c^2+25}+5=12$

$c^2=24$

$\therefore\ b^2=c^2-a^2=24-9=15$

따라서 $a^2+3b^2=9+3\times15=54$

29. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각 $A=\{1,4\}$, $B=\{2,5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(i) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times2\times2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times2=6$
2	1	0	$3\times2^2\times2=24$
0	2	1	$3\times2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times2^2\times2=24$
2	0	1	$3\times2^2=12$
0	1	2	$3\times2=6$

$\therefore\ 2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

【 다른 풀이 】

(i) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은

$(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(3,3,3)$, $(4,4,4)$, $(5,5,5)$와

$(1,1,4)$, $(1,4,4)$, $(2,2,5)$, $(2,5,5)$와

$(1,2,3)$, $(1,3,5)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$5\times\dfrac{3!}{3!}+4\times\dfrac{3!}{2!}+4\times3!=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은

$(1,1,2)$, $(1,1,5)$, $(1,3,3)$, $(2,2,3)$, $(2,4,4)$,

$(3,3,4)$, $(3,5,5)$, $(4,4,5)$와

$(1,2,4)$, $(1,4,5)$, $(2,3,5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times3!=42$

$\therefore\ 42\times2=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은

$(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(1,5,5)$, $(2,2,4)$, $(2,3,3)$,

$(3,3,5)$, $(3,4,4)$, $(4,5,5)$와

$(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(2,4,5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times3!=42$

$\therefore\ 42\times2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$f(x)=e^x(ax^3+bx^2)=x^2e^x(ax+b)$

$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$

$f(0)=f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는

$x=0$에서 x축에 접하고,

조건 (가)에서 $M(t)=f(t)$에 의하여

함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $a>0$

또한 함수 $f(x)$의 그래프가 $x>0$에서 x축과

만나지 않고 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$이므로 $-\dfrac{b}{a}<0$

$\therefore\ b>0$

$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$에서

이차방정식 $ax^2+(3a+b)x+2b=0$의 판별식을

D라 하면

$D=(3a+b)^2-8ab=(a-b)^2+8a^2>0$이므로

이차방정식은 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$를 갖는다.

$\alpha+\beta=-\dfrac{3a+b}{a}<0$, $\alpha\beta=\dfrac{2b}{a}>0$이므로

$\alpha<\beta<0$이다.

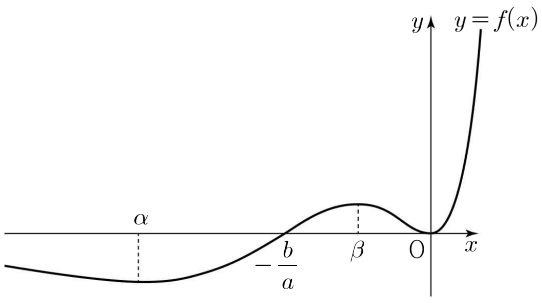
$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

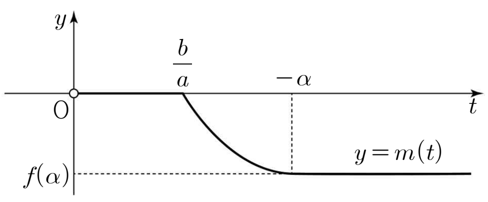
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $m(t)=\begin{cases} 0 & \left(0<t<\frac{b}{a}\right) \\ f(-t) & \left(\frac{b}{a}\le t\le -\alpha\right) \\ f(\alpha) & (t>-\alpha) \end{cases}$



조건 (나)에서 양수 k에 대하여

닫힌 구간 $[k, k+2]$에 있는 임의의 실수 t에

대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립하므로

$\frac{b}{a}=k$, $-\alpha=k+2$

$f'(\alpha)=f'(-k-2)=0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}}\{a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak\}=0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}}\neq 0$이므로

$a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak=0$

$a(k-2)=0$

$\therefore\ k=2,\ \alpha=-4$

따라서 $f(x)=ae^x(x^3+2x^2)$이고,

$m(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<2) \\ ae^{-t}(-t^3+2t^2) & (2\le t\le 4) \\ -\frac{32a}{e^4} & (t>4) \end{cases}$

조건 (다)에 의하여

$\int_1^5 \{e^t\times m(t)\}dt$

$=\int_2^4 (-at^3+2at^2)dt+\int_4^5\left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$

$=\left[-\frac{a}{4}t^4+\frac{2a}{3}t^3\right]_2^4+\left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$

$=\frac{28a}{3}-32ae=\frac{7}{3}-8e$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(k+1)=f(3)=\frac{45}{4}e^3$이고, $p+q=49$