Lecture Notes for
Introduction to Probability and Statistics
© 2013, Sungkuk Lim
Hanyang University, Ansan, 425-791, Korea
calltimy@hanyang.ac.kr

Probability and Statistics / 확률과 통계

강의노트 18

신뢰구간

129. 신뢰구간의 추정
- 선거전 여론조사 1회 // 1000명 조사, 550명 호의적 반응
- n = 1000, $\hat{p}$ = .55
- 추론 : 지지율p 는 .519 와 .581 사이, 95% 신뢰도

130. 95% 신뢰도의 의미 - 궁수와 과녁
>> 95%의 확률로 10cm 원에 명중시키는 궁수
>> 과녁 뒤의 관찰

131. 과녁에 있는 화살을 통한 통계의 이해

[1단계]
많은 화살, 흡점의 폭, 추정치 $\hat{p}$

$$\sigma(\hat{p}) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$ ...No.122

정규분포표를 사용하여 95%의 화살들이 꽂힌 구간을 찾으면,

$$.95 = \mathrm{P}[-1.96 \leq Z \leq 1.96]$$ ...p.697

정리하면,

$$.95 = P[-1.96 \leq \frac{\hat{p}-p}{\sigma(\hat{p})} \leq 1.96]$$

$$.95 = P[\ p - 1.96\sigma(\hat{p}) \leq \hat{p} \leq p + 1.96\sigma(\hat{p})]$$

$$.95 = P[\ \hat{p} - 1.96\sigma(\hat{p}) \leq p \leq \hat{p} + 1.96\sigma(\hat{p})]$$

==>> 즉, 많은 화살의 주위에 10cm 의 원을 그리면 95%가 p를 포함한다는 뜻

[문제] 중심(p)도 모르고, 원의 지름 10cm ($\sigma(p)$) 도 모른다.

[대안] p 대신 $\hat{p}$, $\sigma(\hat{p})$ 대신 표준오차 $se(\hat{p})$ 사용

$$\sigma(\hat{p}) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$$se(\hat{p}) = \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$$

$$.95 = P[\ \hat{p} - 1.96se(\hat{p}) \leq p \leq \hat{p} + 1.96se(\hat{p})]$$

위 식의 의미는 모집단의 정확한 비율 p 가 아래의 확률구간 내에 있을 확률

$(\hat{p}-1.96se(\hat{p}),\hat{p}+1.96se(\hat{p}))$

표본을 여러번에 걸쳐 추출하면 그중 95%는 이 구간내에 p가 포함

[2단계]

여론조사에서 1000명의 유권자로 구성된 하나의 표본에서

$\hat{p}$ = .55 를 이용, p를 추정한다.

$$se(\hat{p}) = \sqrt{\frac{(.55)(.45)}{1000}} = .0157$$

p는 아래의 범위내에 있다고 95% 확신 (오차는 ±.031, 3%)

$\hat{p} \pm 1.96se(\hat{p}) = .550 \pm (1.96)(.0157) = .550 \pm .031$

$.519 \leqq p \leqq .581$ -> 오차의 한계

132. 신뢰도를 높이는 두가지 방법 (95% --> 99% 로)

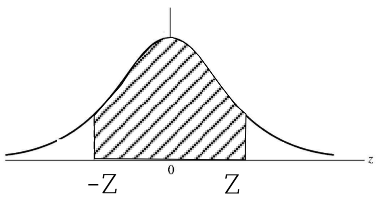
▶ 원을 크게 그리기

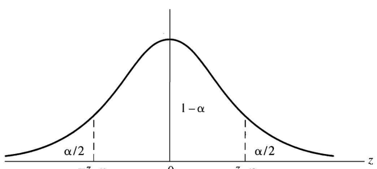
▶ 궁수의 실력을 높여 화살을 흑점에 가까이 명중시키기

[1] 원을 크게

>> 10cm의 원을 20cm 나 50cm 로 크게 한다. 오차의 한계를 크게 하면 그 범위내에 참값(p)가 들어갈 확률은 높아진다 (예: 100%의 확률로 p 는 0 과 1 사이에 있다).

a 사용 : 신뢰수준과 100% 사이의 차이, (1-a)100% 신뢰수준





면적 0.95

.95 = P[-Z(a/2)<Z<Z(a/2)]

---> .025 = P[Z>Z(a/2)]

P[Z>Z(a/2)] = a/2

즉

P[Z>Z(.025)] = .025 , a=.05

1-a	.80	.90	.95	.99
a	.20	.10	.05	.01
a/2	.10	.05	.025	.005
$Z_{a/2}$	1.28	1.64	1.96	2.58

위 표는 여러 신뢰수준에 대한 값을 나타낸 것

99%의 신뢰수준은 다음과 같다.

$$.99 = P[\hat{p} - 2.58se(\hat{p}) \leq p \leq \hat{p} + 2.58se(\hat{p})]$$

줄여쓰면,

$$p = \hat{p} \pm 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= .55 \pm 2.58\sqrt{\frac{(.55)(.45)}{1000}}$$

$$= .55 \pm .041$$

[2] 정확하게 (표본의 크기를 증가)
>> 궁수가 95%의 화살을 10cm 가 아닌 1cm 원안에 맞힌다면 더 예리하게 추정할 수 있다.

신뢰구간의 폭은 표본의 크기에 달려 있다.
신뢰구간 : $\hat{p} + E$ 의 형태
E 는 오차 : $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ (즉, n이 커지면 E 는 작아짐)
$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 p^*(1-p^*)}{E^2}$, (여기서 p* 는 p 의 추정치)

오차(E)가 작고 신뢰도가 높은 조사결과를 요구해 본다.($E = \pm 0.01$, 신뢰도 99%)
p* 는 p 의 추정치로 아직 모르는 값이므로 임의의 값 0.5를 사용한다.

$$n = \frac{(2.58)^2(.5)^2}{(.01)^2} = 16641$$

1000명의 유권자는 3% 오차에 95%의 신뢰도였다. 1% 오차에 99%의 신뢰도를 얻으려면 16641명의 유권자를 조사해야한다.

133. 여론조사와 선거결과가 다른 이유
A. 응답편향 : 설문조사에 거짓말을 하거나 투표당일 마음을 바꾸는 경우
B. 조사에 응답했으나 투표하지 않는 경우
C. 무응답편향 : 조사를 거부하는 경우

134. 모집단의 평균 μ 의 신뢰구간 구하기

$\overline{X}$: 표본평균, 정규분포를 따름
μ : 모집단의 평균
σ : 표준편차

$$.95 = P[-1.96 \leqq Z \leqq 1.96]$$
$$\simeq P[-1.96 \leqq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqq 1.96]$$

σ를 모르기 때문에 표본의 표준편차인 s를 넣어서

$$.95 \simeq P[-1.96 \leqq \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leqq 1.96]$$

$s/\sqrt{n}$ 을 표본표준오차라 부르고 SE($\overline{X}$) 로 표시한다.

$$.95 \simeq P[\overline{X}-1.96\,SE(\overline{X}) \leqq \mu \leqq \overline{X}+1.96\,SE(\overline{X})]$$

앞과 같이 확률구간

$\overline{X}\pm 1.96\,SE(\overline{X})$ 이 .95의 확률로 진짜평균 μ 를 포함한다.