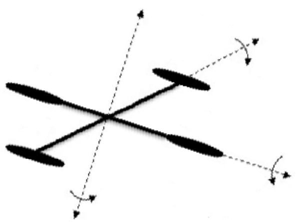
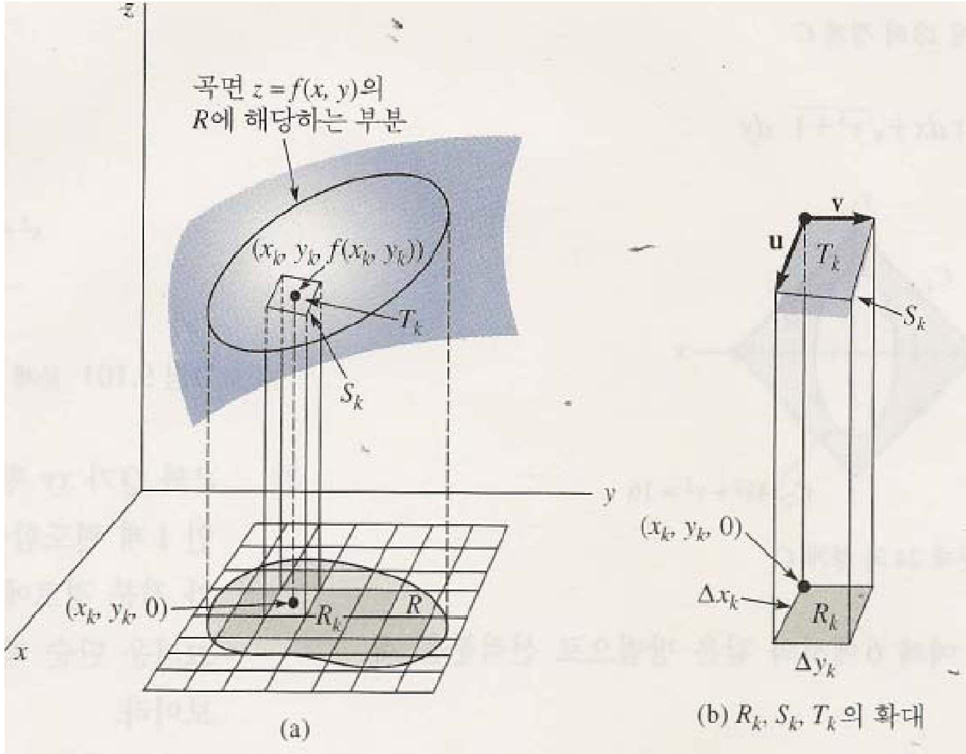
9장 벡터의 미적분
(11)



- 곡면의 넓이



(a)

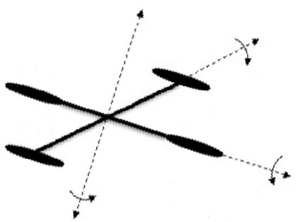
(b) R_k, S_k, T_k의 확대

$$\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$$

$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \end{vmatrix} = [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x_k\,\Delta y_k$$

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\,\Delta x_k\,\Delta y_k$$



$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\, \Delta x_k\, \Delta y_k$$

정의 9.11 **곡면의 넓이**

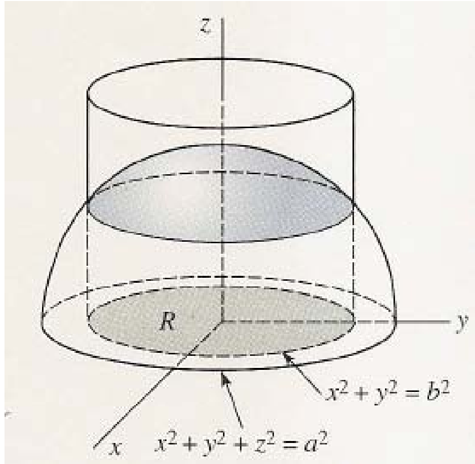
f가 1계 편도함수 f_x와 f_y가 닫힌 영역 R에서 연속인 함수이면 R 위에서 f가 그리는 **곡면의 넓이**(surface area)는

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \qquad (2)$$

이다.

예제 1 곡면의 넓이

xy 평면 위의 원 $x^2+y^2=b^2$, $0<b<a$에 해당하는 구 $x^2+y^2+z^2=a^2$의 넓이를 구하라.



풀이 구가 나타내는 곡면을 $z=f(x, y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$로 정의하면

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \text{ 그리고 } f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

이고

$$1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

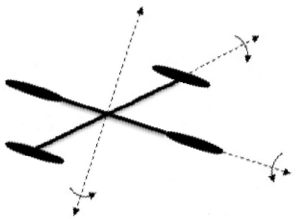
이다. 따라서 (2)는

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dA$$

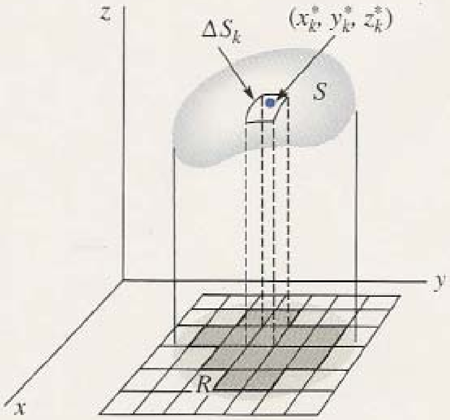
이고, 여기서 R은 그림 9.103에 나와 있는 영역이다. 마지막 이중적분을 극좌표계로 바꾸어 계산하면

$$\begin{aligned} A(S) &= a\int_0^{2\pi}\int_0^b (a^2-r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\left[-(a^2-r^2)^{1/2}\right]_0^b d\theta = a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \end{aligned}$$

이다. □



- 면적분



$w=G(x, y, z)$

1. 함수 G가 $z=f(x, y)$의 그래프인 곡면 S를 포함하는 3차원 영역에서 정의되고, 곡면의 xy 평면에 대한 정사영 R이 I형 또는 II형 영역이라 하자.
2. 곡면을 넓이가 ΔS_k인 n개의 부분곡면으로 분할한다. 여기서 곡면의 분할은 xy 평면의 영역 R을 넓이가 ΔA_k 인 n개의 직사각형 R_k로 나누는 분할 P에 대응한다.
3. $\|P\|$는 분할의 놈(norm), 즉 R_k의 가장 긴 대각선 길이이다.
4. 각 부분곡면에서 점 (x_k^*, y_k^*, z_k^*)를 선택한다.
5. 합 $\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k$ 를 구성한다.

정의 9.12 **면적분**

G를 곡면 S를 포함하는 공간에서 정의되는 3변수 함수라 하자. **S에 대한 G의 면적분은**

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k \tag{4}$$

이다.

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,y,f(x,y))\sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA$$

$$dS = \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA$$

■ **S의 다른 평면으로의 사영** $y=g(x,z)$가 xz 평면의 영역 R 위로 사영되는 곡면 S의 방정식이면

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,g(x),z)\sqrt{1+[g_x(x,z)]^2+[g_z(x,z)]^2}\,dA \tag{6}$$

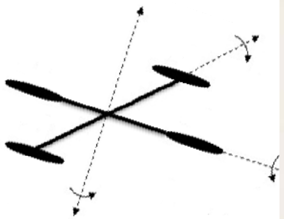
이다.

마찬가지로 $x=h(y,z)$가 yz 평면 위로 사영되는 곡면의 방정식이면, (5)는

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(h(y,z),y,z)\sqrt{1+[h_y(y,z)]^2+[h_z(y,z)]^2}\,dA \tag{7}$$

가 된다.

■ **곡면의 질량** $\rho(x,y,z)$가 곡면의 임의의 점에서 곡면의 밀도(면밀도, 단위면적당 질량)이면 곡면의 **질량** m은



$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS \tag{8}$$

이다.

예제 2 곡면의 질량

제1팔분공간에 위치하는 포물면(paraboloid) $z=1+x^2+y^2$, $1 \le z \le 5$의 질량을 구하라. 단 곡면 위의 점 P의 밀도는 xy 평면으로부터의 거리에 비례한다.

풀이 문제의 곡면과 xy 평면 위로의 사영은 그림 9.104와 같다. $\rho(x, y, z)=kz$이고 $z=1+x^2+y^2$이므로, (8)과 (5)에서

$$m = \iint_S kz\,dS = k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA$$

이다. 극좌표계를 사용하면

$$\begin{aligned} m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1 + r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1 + 4r^2)^{1/2} + r^3(1 + 4r^2)^{1/2}]\,dr\,d\theta \quad \leftarrow \text{부분적분} \\ &= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1 + 4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1 + 4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{k\pi}{2}\left[\frac{5(17)^{3/2}}{12} - \frac{17^{5/2}}{120} - \frac{3}{40}\right] \approx 19.2k \end{aligned}$$

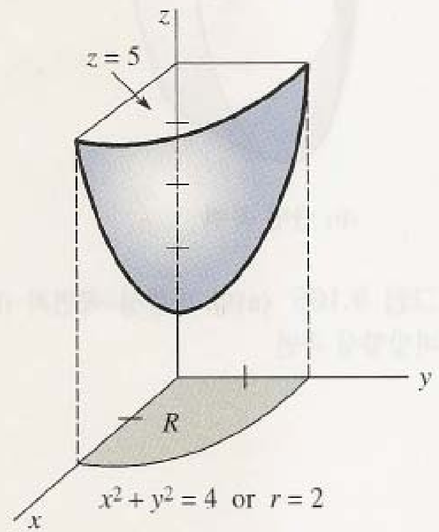
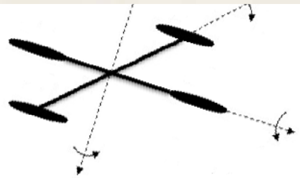
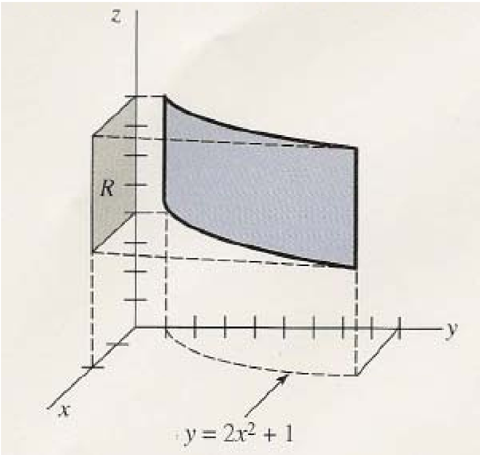


그림 9.104 예제 2의 곡면





예제 3 면적분의 계산

$\iint_S xz^2\, dS$를 계산하라. 여기서 S는 포물면 기둥 $y=2x^2+1$의 일부분으로 제1팔분공간에서 $x=0$, $x=2$, $z=4$, $z=8$의 내부로 제한된다.

풀이 $g(x, z)=2x^2+1$과 그림 9.105와 같은 xz 평면의 직사각형 영역 R에 대해 (6)을 사용한다. $g_x(x, z)=4x$이고 $g_z(x, z)=0$이므로

$$\iint_S xz^2\, dS = \int_0^2 \int_4^8 xz^2\sqrt{1+16x^2}\, dz\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{z^3}{3} x\sqrt{1+16x^2}\right]_4^8 dx = \frac{448}{3}\int_0^2 x(1+16x^2)^{1/2}\, dx$$

$$= \frac{28}{9}(1+16x^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{28}{9}\left[65^{3/2}-1\right] \approx 1627.3$$

- 방향성곡면

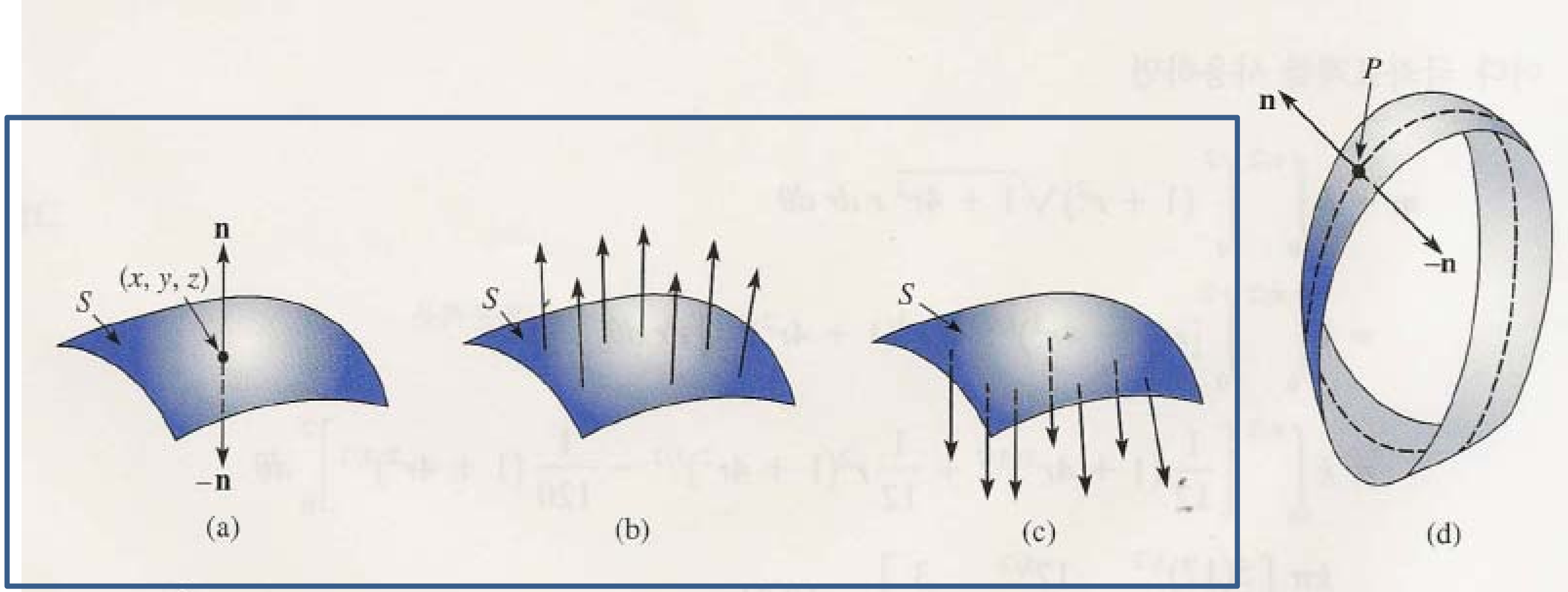
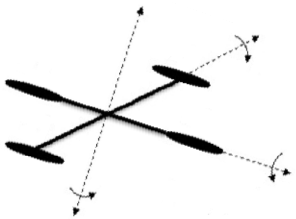
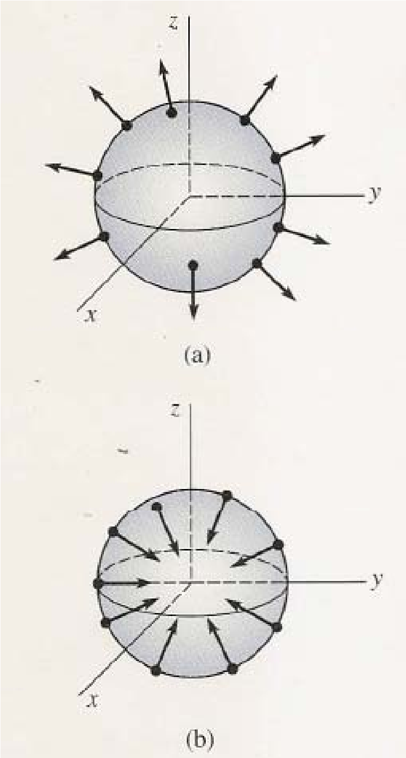


그림 9.107 (b)의 위 방향과 (c)의 아래 방향 곡면

방향성곡면

비향성곡면





(a)
(b)

예제 4 곡면의 방향성

반지름 $a>0$인 구 $x^2+y^2+z^2=a^2$을 생각하자. 구의 방정식을 $g(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-a^2$으로 정의하면

$$\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \text{ 그리고 } \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a$$

이다. 따라서 곡면의 두 방향은

$$\mathbf{n} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \text{ 그리고 } \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{x}{a}\mathbf{i} - \frac{y}{a}\mathbf{j} - \frac{z}{a}\mathbf{k}$$

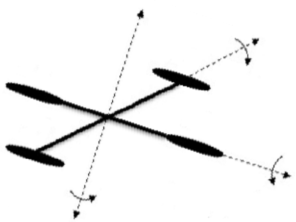
이다. 여기서 벡터장 $\mathbf{n}$은 바깥쪽 방향을 나타내는 반면에 $\mathbf{n}_1=-\mathbf{n}$은 안쪽 방향을 나타낸다. 그림 9.108을 보자. ❑

- 벡터장의 적분

$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$가 유체의 속도장

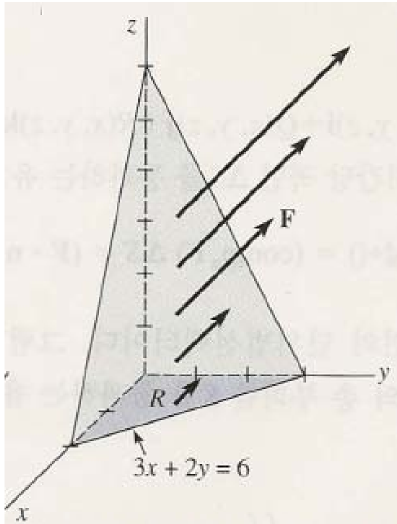
ΔS를 통과하는 유체의 부피 $\quad$ (높이)(밑면의 넓이) $= (\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S$

$$\text{유량} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS$$



예제 5 곡면을 통과하는 유량

$\mathbf{F}(x, y, z)=z\mathbf{j}+z\mathbf{k}$가 액체의 흐름을 나타낸다. 제1팔분공간에서 $z=6-3x-2y$로 주어지고 위 방향을 갖는 평면 S를 통과하는 $\mathbf{F}$의 유량(flux)을 구하라.



풀이 벡터장과 곡면은 그림 9.110과 같다. 평면을 $\mathbf{k}$ 성분이 양이 되도록 $g(x, y, z)=3x+2y+z-6=0$으로 정의하면 단위법선벡터는

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

이고, 따라서 구하려는 유량은

$$\text{유량} = \iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\, dS$$

이다. 곡면의 xy 평면 위로의 사영 R을 이용하면 (10)에서

$$\text{유량} = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_R 3(6-3x-2y)(\sqrt{14}\, dA)$$

$$= 3\int_0^2\int_0^{3-3x/2}(6-3x-2y)\, dy\, dx = 18$$