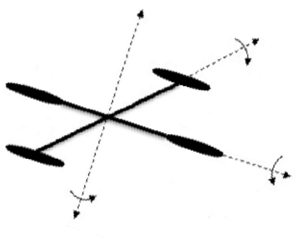
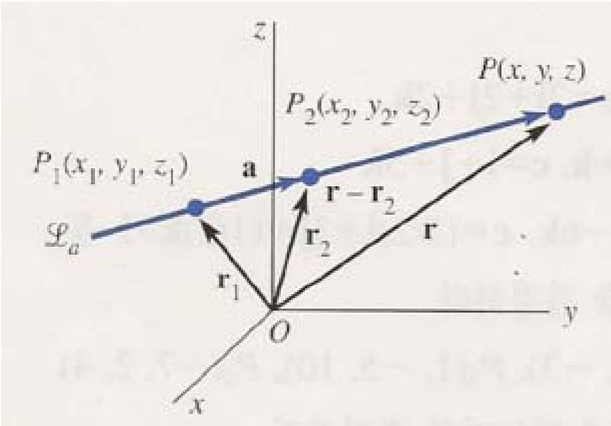
7장 Vectors

7.5 직선과 평면



- 직선의 표현 (1)



$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

방향벡터 : $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}}$$

예제 1 직선의 벡터방정식

(2, −1, 8)과 (5, 6, −3)을 지나는 벡터방정식을 구하라.

풀이 **a**=<2−5, −1−6, 8−(−3)>=<−3, −7, 11>이라고 정의하자. 다음 식은 직선에 대한 세 가지 가능한 벡터방정식이다.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 2, -1, 8 \rangle + t\langle -3, -7, 11 \rangle \qquad (3)$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 6, -3 \rangle + t\langle -3, -7, 11 \rangle \qquad (4)$$
$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 6, -3 \rangle + t\langle 3, 7, -11 \rangle \qquad (5)$$ ❑

- 직선의 표현 (2)

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_2 + t(x_2 - x_1), y_2 + t(y_2 - y_1), z_2 + t(z_2 - z_1)\rangle$$
$$= \langle x_2 + a_1 t, y_2 + a_2 t, z_2 + a_3 t\rangle$$

$$\boxed{x = x_2 + a_1 t, \quad y = y_2 + a_2 t, \quad z = z_2 + a_3 t}$$

예제 2 직선의 매개방정식

예제 1의 직선에 대한 매개방정식을 구하라.

풀이 (3)에서

$$x = 2 - 3t, \quad y = -1 - 7t, \quad z = 8 + 11t \tag{7}$$

가 나온다. 매개방정식의 다른 집합은 (5)로부터

$$x = 5 + 3t, \quad y = 6 + 7t, \quad z = -3 - 11t \tag{8}$$

으로 얻을 수 있다. ❑

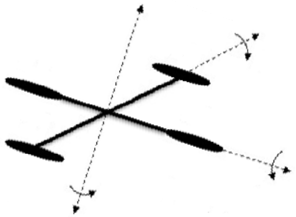
$$t = \frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3} \rightarrow \boxed{\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}}$$

예제 4 직선의 대칭방정식

(4, 10, −6)과 (7, 9, 2)를 지나는 직선에 대한 대칭방정식을 구하라.

풀이 $a_1=7-4=3$, $a_2=9-10=-1$ 및 $a_3=2-(-6)=8$이라고 하자. (9)로부터 직선에 대한 대칭방정식은 아래와 같다.

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-9}{-1} = \frac{z-2}{8}$$



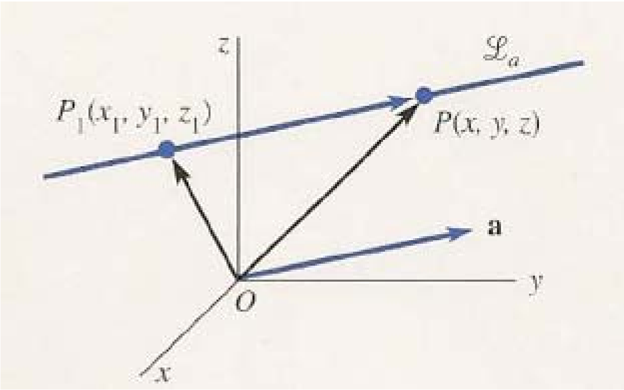
예제 5 직선의 대칭방정식

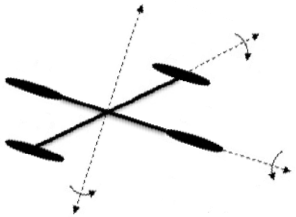
(5, 3, 1)과 (2, 1, 1)을 지나는 직선에 대한 대칭방정식을 구하라.

풀이 $a_1=5-2=3$, $a_2=3-1=2$와 $a_3=1-1=0$이라 하자. 앞의 논의로부터 직선에 대한 대칭방정식은

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{2},\ z=1$$

이 된다. 다시 말하면 대칭방정식은 평면 $z=1$ 위에서 직선을 나타낸다. ❑





예제 6 벡터에 평행한 직선

(4, 6, −3)을 지나고 $\mathbf{a}=5\mathbf{i}-10\mathbf{j}+2\mathbf{k}$에 평행한 직선에 대한 벡터방정식, 매개방정식, 대칭방정식을 구하라.

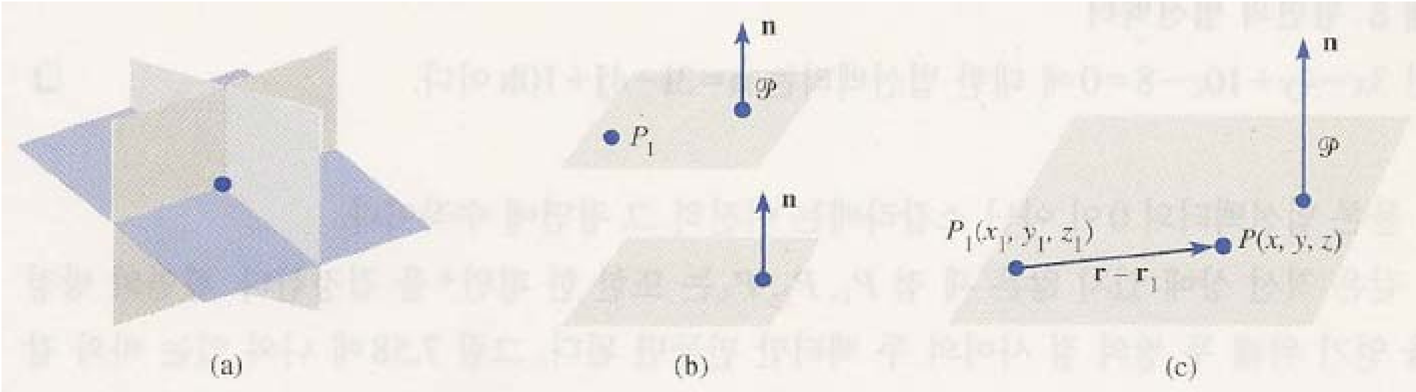
풀이 $a_1=5,\ a_2=-10,\ a_3=2$라 놓으면, 곧 다음 방정식을 얻는다.

벡터방정식: $\langle x, y, z\rangle=\langle 4, 6, -3\rangle+t\langle 5, -10, 2\rangle$

매개방정식: $x=4+5t,\ y=6-10t,\ z=-3+2t$

대칭방정식: $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-6}{-10}=\dfrac{z+3}{2}$ ❑

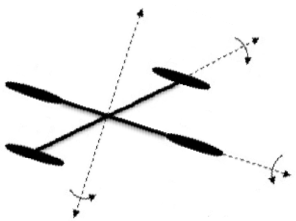
- 평면의 표현



$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$$

$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$



예제 7 벡터에 수직인 평면

점 $(4, -1, 3)$을 포함하고 벡터 $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+8\mathbf{j}-5\mathbf{k}$에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

풀이 (11)로부터 구하는 방정식은 다음과 같다.

$$2(x-4)+8(y+1)-5(z-3)=0 \quad \text{또는} \quad 2x+8y-5z+15=0$$ ❑

예제 8 평면의 법선벡터

평면 $3x-4y+10z-8=0$에 대한 법선벡터는 $\mathbf{n}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+10\mathbf{k}$이다. ❑

예제 9 평면을 결정하는 세 점

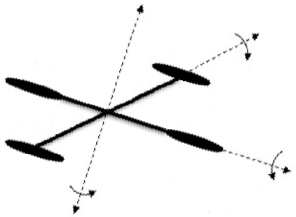
(1, 0, −1), (3, 1, 4)와 (2, −2, 0)을 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

$$\left.\begin{matrix}(1,0,-1)\\(3,1,4)\end{matrix}\right\}\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k},\quad \left.\begin{matrix}(3,1,4)\\(2,-2,0)\end{matrix}\right\}\mathbf{v}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k},\quad \left.\begin{matrix}(2,-2,0)\\(x,y,z)\end{matrix}\right\}\mathbf{w}=(x-2)\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=-11\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=0$$

$$-11(x-2)-3(y+2)+5z=0 \quad \text{또는} \quad -11x-3y+5z+16=0$$



예제 13 두 평면의 교선

두 평면

$$2x - 3y + 4z = 1$$
$$x - y - z = 5$$

의 교선에 대한 매개방정식을 구하라.

풀이 위의 미지수가 세 개인 2차 연립방정식에서 임의로 한 변수, 말하자면 $z=t$를 택하여

$$2x - 3y = 1 - 4t$$
$$x - y = 5 + t$$

에서 x와 y에 대하여 풀자. 그러면 $x=14+7t$, $y=9+6t$, $z=t$를 얻는다. 이들이 주어진 평면들의 교선에 대한 매개방정식이다. ❑

예제 14 평면과 직선의 교점

평면 $3x-2y+z=-5$ 와 직선 $x=1+t$, $y=-2+2t$, $z=4t$ 의 교점을 구하라.

풀이 (x_0, y_0, z_0)이 교점을 나타낸다고 하면, $3x_0-2y_0+z_0=-5$ 이고, 적당한 수 t_0에 대하여 $x_0=1+t_0$, $y_0=-2+2t_0$, $z_0=4t_0$ 이어야 한다. 마지막 방정식을 평면의 방정식에 대입하면

$$3(1+t_0)-2(-2+2t_0)+4t_0=-5 \quad \text{또는} \quad t_0=-4$$

이다. 직선의 매개방정식으로부터 $x_0=-3$, $y_0=-10$과 $z_0=-16$을 얻는다. 교점은 $(-3, -10, -16)$이다. ❑