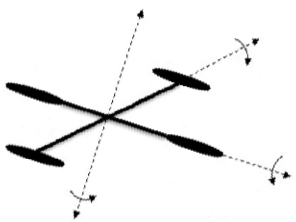
9장 벡터의 미적분
(7)

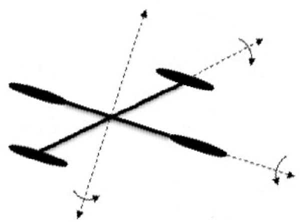


- 2변수 함수의 미분

$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \longrightarrow d\phi = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ **완전미분**

$\phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3 \longrightarrow x^2y^3\ dx + x^3y^2\ dy$ **완전미분**

$(2y^2-2y)\ dx + (2xy-x)dy$ **완전미분이 아님**



- 경로 무관성

A, B를 연결하는 모든 경로에 대한 선적분이 같은 값을 가질때.

정리 9.8 **선적분의 기본 정리**

$d\phi = P\ dx + Q\ dy$인 함수 $\phi(x, y)$가 존재하면, 즉 $P\ dx + Q\ dy$가 완전미분이면 $\int_C P\ dx + Q\ dy$는 적분 경로 C의 양 끝점 A와 B에만 의존하고

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \phi(B) - \phi(A)$$

이다.

증명 C가 $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$와 같이 매개변수로 정의된 매끄러운 경로이고 A와 B의 좌표가 각각 $(f(a), g(a))$와 $(f(b), g(b))$라 하면, 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx + Q\,dy &= \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt \\ &= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\,dt = \phi(f(t), g(t))\Big]_a^b \\ &= \phi(f(b), g(b)) - \phi(f(a), g(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A)\end{aligned}$$

$\int_C P\ dx + Q\ dy$

↓

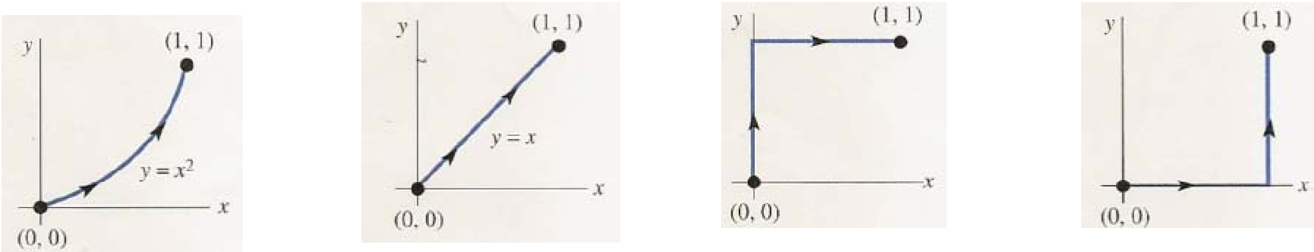
$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy$$

예제 1 적분 경로에 무관한 적분

적분 $\int_C y\,dx + x\,dy$는 그림 9.65에 나와 있는 (0, 0)과 (1, 1) 사이의 모든 적분 경로에 대해 같은 값을 갖는다. 연습문제 9.8의 문제 11 ~ 14에 의하면 이들 모든 적분 경로에 대해

$$\int_C y\,dx + x\,dy = 1$$

이다. 예제 2에서는 주어진 적분이 적분 경로에 무관하다는 것을 증명할 것이다. □



예제 2 정리 9.8의 사용

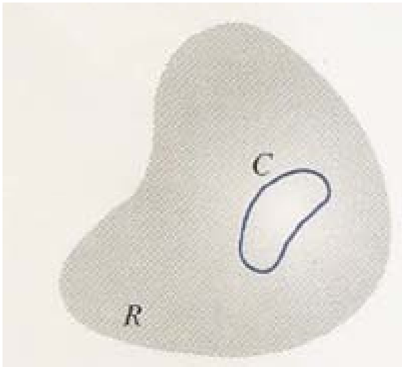
예제 1에서 $d(xy) = y\,dx + x\,dy$임에 주목하자. 즉 $y\,dx + x\,dy$는 완전미분이다. 따라서 $\int_C y\,dx + x\,dy$는 임의의 두 점 A와 B를 잇는 적분 경로에 무관하다. 따라서 A와 B가 각각 (0, 0), (1, 1)이면 정리 9.8로부터

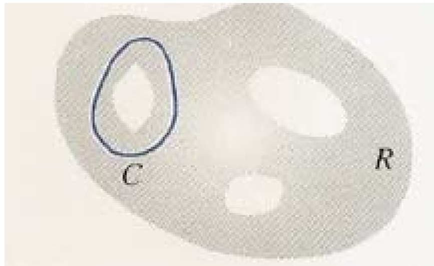
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx + x\,dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)} = 1$$

이다. □

- 단순 연결 (simply connect)

- R은 연결되어 있다. 즉 영역의 모든 두 점들이 곡선의 전부가 R에 포함되는 조각별로 매끄러운 곡선으로 연결된다.
- 곡선의 전부가 R에 포함되는 단순 폐곡선 C가 R을 벗어나지 않고 한 점으로 줄거나 수축될 수 있다.





- 평면에서 경로 무관성

정리 9.9 **경로 무관성의 판정**

P와 Q가 열린 단순연결 영역에서 연속인 1계 편도함수를 가질 때 $\int_C P\,dx+Q\,dy$가 적분 경로 C에 무관하기 위한 필요충분조건은 영역의 모든 (x, y)에 대하여

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

이다.

예제 3 경로에 유관한(path-dependent) 적분

적분 $\int_C (x^2-2y^3)\,dx+(x+5y)\,dy$가 경로 C에 무관하지 않음을 보이라.

풀이 $P=x^2-2y^3$, $Q=x+5y$에서

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \text{ 그리고 } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

즉 $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$이므로, 정리 9.9로부터 적분은 경로에 무관하지 않다. 다시 말해 $(x^2-2y^3)\,dx+(x+5y)\,dy$는 완전미분이 아니다. ❑

예제 4 경로에 무관한 적분

$\int_C (y^2-6xy+6)\,dx+(2xy-3x^2)\,dy$는 $(-1, 0)$과 $(3, 4)$ 사이의 적분 경로 C에 무관함을 보이고 적분값을 계산하라.

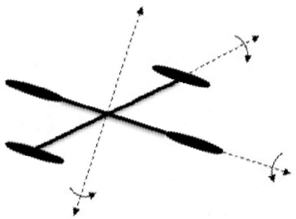
풀이 $P=y^2-6xy+6$과 $Q=2xy-3x^2$으로 놓으면

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x \text{ 그리고 } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 6x$$

$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ **경로에 무관**

$$\phi=y^2x-3x^2y+6x+g(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}= 2yx - 3x^2 + g'(y) = 2yx - 3x^2$$



$$\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x$$

$$\int_{(-1,0)}^{(3,4)} (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy = \int_{(-1,0)}^{(3,4)} d(xy^2 - 3x^2y + 6x)$$

$$= (xy^2 - 3x^2y + 6x)\Big]_{(-1,0)}^{(3,4)}$$

$$= (48 - 108 + 18) - (-6) = -36$$

■ 별해 적분이 경로에 무관하므로 두 점을 잇는 임의의 편리한 곡선을 사용할 수 있다. 곡선 $y=x+1$ 을 택하여 x를 매개변수로 사용하면

$$\int_C (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{3} [(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6]\,dx + [2x(x+1) - 3x^2]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 2x + 7)\,dx = -36$$

이다. ❑

- 보존적 벡터장

$\int_C P\,dx+Q\,dy$가 적분 경로 C에 무관하면

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$$

$$= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

을 만족시키는 ϕ가 존재함을 알고 있다. 여기서 $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$는 벡터장이고 $P=\partial\phi/\partial x$, $Q=\partial\phi/\partial y$이다. 다시 말해 벡터장 $\mathbf{F}$는 함수 ϕ의 기울기 벡터(gradient)이다. 즉 $\mathbf{F}=\nabla\phi$인데, 이때 $\mathbf{F}$를 **기울기장**(gradient field)이라 부르고 ϕ를 F의 **퍼텐셜 함수**(potential function)라고 부른다. 기울기 힘장(gradient force field) $\mathbf{F}$에서는 물체에 가해지는 힘에 의해 물체가 A에서 B로 움직일 때 행해진 일은 두 점을 잇는 경로에 관계없이 모두 같다. 특히 경로가 폐곡선인 경우의 일은 0이다. 연습문제 9.9의 문제 29를 보라. 이러한 이유로 위와 같은 힘장을 **보존적**(conservative)이라고 한다. 보존적 힘장 $\mathbf{F}$에서는 역학적 에너지 보존법칙(law of conservation of mechanical energy)이 성립한다. 즉 보존장 내의 경로를 따라 움직이는 물체에 대해

$$\boxed{\text{운동에너지} + \text{위치에너지} = \text{상수}}$$

예제 5 기울기장

벡터장 $\mathbf{F}=(y^2+5)\mathbf{i}+(2xy-8)\mathbf{j}$가 기울기 벡터장임을 보이고 $\mathbf{F}$의 퍼텐셜 함수를 구하라.

풀이 $P=y^2+5$와 $Q=2xy-8$에서

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$$

이다. 따라서 $\mathbf{F}$는 기울기장이고

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=y^2+5 \text{ 그리고 } \frac{\partial \phi}{\partial y}=2xy-8,$$

을 만족시키는 퍼텐셜 함수 ϕ가 존재한다. 이후는 예제 4에서와 같은 방법을 사용하여 $\phi=xy^2-8y+5x$를 구한다. 이를 확인하면 다음과 같다.

$$\nabla\phi=\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j}=(y^2+5)\mathbf{i}+(2xy-8)\mathbf{j}$$ ❑

- 공간에서의 경로 무관성

정리 9.10 **경로 무관성의 검증**

P, Q, R이 열린 단순연결 영역에서 연속인 1계 편도함수를 가질 때 $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$가 경로 C에 무관하기 위한 필요충분조건은

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{그리고} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

이다.

예제 6 경로에 무관한 적분

$\int_C (y+yz)\,dx+(x+3z^3+xz)\,dy+(9yz^2+xy-1)dz$는 (1, 1, 1)과 (2, 1, 4) 사이의 경로 C에 무관함을 보이라. 적분값을 계산하라.

$$P = y + yz, \quad Q = x + 3z^3 + xz, \quad R = 9yz^2 + xy - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\boxed{\phi = xy + xyz + g(y, z)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz \;\longrightarrow\; \frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3 \;\longrightarrow\; g = 3yz^3 + h(z)$$

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1$$

$h'(z) = -1$ 또는 $h(z) = -z + \cancel{C}$

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

$$= \int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} d(xy + xyz + 3yz^3 - z)$$

$$= (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194$$